Fizica atomului si moleculei

1. Spectre atomice. Reguli empirice (formula Balmer, formula Rydberg, seria Pickering)

Rezolvare: Spectrele atomice (de emisie sau absorbtie) sunt spectre de linii. Primele spectre de linii au fost obtinute de Th. Melvill (1752) prin descompunerea cu o prisma optica a luminii emise de un gaz incandescent.

Spectrele atomice de absorbtie se obtin trecand lumina cu spectru continuu printr-un gaz si descompunand-o apoi cu o prisma sau retea de difractie. Spectrele atomice de absorbtie se prezinta sub forma unor linii negre pe un spectru continuu.

Obtinerea spectrelor unui numar mare de elemente a permis observarea unor regularitati ale spectrelor.

a) Fiecare element chimic isi are propriul sau spectru atomic.
b) Atomii unui element absorb exact acele radiatii pe care le pot si emite (G.R. Kirchhoff).
c) J. Balmer (1885) a aratat ca lungimile de unda ale unei serii de linii din partea vizibila a spectrului atomului de hidrogen (seria Balmer) pot fi calculate cu formula:

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (1)$$

unde n = 3, 4, 5, … iar B=3645,6 Å este o constanta empirica.

Rydberg scrie aceasta relatie intr-o forma mai generala care da numarul de unda:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \ \text{n = 3, 4, 5, …} \quad (2)$$

in care R = 4/B = 109677,58 cm^{-1} este constanta lui Rydberg.

Ansamblul liniilor spectrale a caror succesiune respecta o relatie numerica se numeste *serie spectrala*. In figura 1 este redata schema generala a unei serii spectrale.

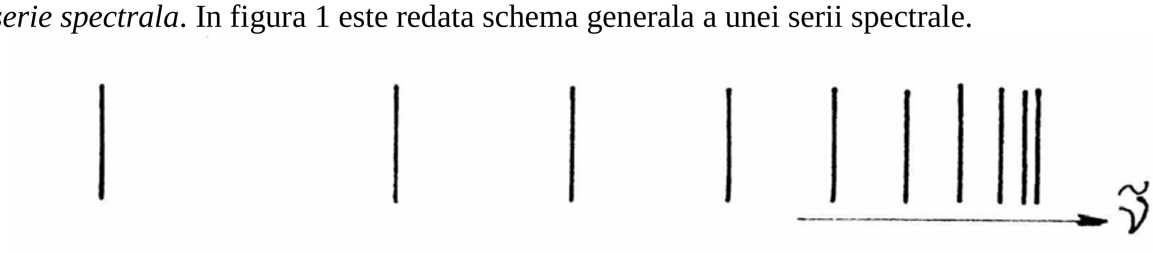


Figura 1. Schema generala a unei serii spectrale.

Pe masura ce n creste, liniile sunt mai dese si mai slabe in intensitate. Pentru n → ∞ se obtine *limita seriei*. In cazul seriei date de relatia (2) aceasta limita este R/4.

Liniile seriei Balmer au fost notate H_α, H_β, H_γ,... Linia H_α (λ = 6563 Å) a fost descoperita de Fraunhofer in spectrul solar.

O relatie de forma (2) poate fi aplicata si altor serii spectrale ale atomului de hidrogen, in forma generalizata:

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n_f^{\ 2}} - \frac{1}{n_i^{\ 2}}\right) \quad (3)$$

unde n_f si n_i sunt numere intregi pozitive, $n_f > n_i$.

Enumeram cateva serii ale hidrogenului.

Seria Lyman: $n_f = 1$, $n_i = 2, 3, 4, ...$ $\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}}\right)$, este situata in ultraviolet (4)

Seria Balmer: $n_f = 2$, $n_i = 3, 4, 5, ...$ este situata in vizibil.

Seria Paschen: $n_f = 3$, $n_i = 4, 5, 6, ...$ este situata in infrarosu. $\tilde{\nu} = R(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}})$ (5)

Seria Brackett: $n_f = 4$, $n_i = 5, 6, 7, ...$ este situata in infrarosu. $\tilde{\nu} = R(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}})$ (6)

Seria Pfundt: $n_f = 5$, $n_i = 6, 7, 8, ...$ este situata in infrarosu. $\tilde{\nu} = R(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}})$ (7)

Regularitati de tipul (3) sau de alt tip au fost constatate si la spectrele atomice ale altor elemente. In anul 1897 astronomul Pickering a descoperit in spectrul stelar o serie spectrala foarte asemanatoare seriei Balmer a hidrogenului. In figura 2 sunt prezentate schematic cele doua serii.

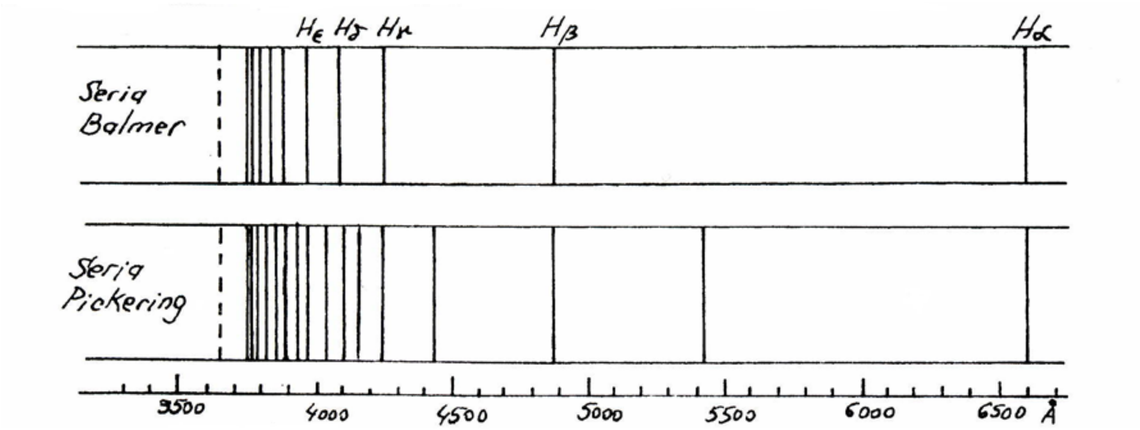


Figura 2. Compararea seriilor Balmer si Pickering.

Se observa ca seria Pickering are doua tipuri de linii: unele care coincid cu cele ale seriei Balmer si altele intermediare. Rydberg a aratat ca lungimile de unda ale liniilor spectrale ale acestei serii pot fi calculate tot cu o relatie de tipul (2) in care n ia atat valori intregi cat si semiintregi.

$$\tilde{\nu} = R_{He}(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}) \qquad \text{cu } n = 2,5;\ 3;\ 3,5;\ 4;\ ... \tag{8}$$

$R_{He} = 109722,403\ cm^{-1}$ difera putin de R de la hidrogen.

Valorile intregi ale lui n corespund liniilor care coincid cu cele ale seriei Balmer, iar cele semiintregi celor intermediare. Initial aceasta serie a fost atribuita hidrogenului stelar, pentru ca orice incercare de obtinere a sa utilizand hidrogen terestru a esuat. Dupa ce seria a fost obtinuta in laborator, cu ajutorul unui amestec de hidrogen si heliu, ea a fost atribuita de Bohr atomilor He^+.

Formula seriei Pickering poate fi rescrisa astfel incat valorile pe care le ia n sa fie doar numere intregi: $\tilde{\nu} = 4R_{He}(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}})$ cu $n_i = 2n = 5, 6, ...$ (9)

In spectrul He^+ s-au mai pus in evidenta urmatoarele serii:

Seria Lyman $\tilde{\nu} = 4R_{He}(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}})$ cu $n_i = 3, 4, ...$ in ultraviolet (10)

Seria Fowler $\tilde{\nu} = 4R_{He}(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_i^{\ 2}})$ cu $n_i = 4, 5, ...$ in ultraviolet (11)

2. Efectul fotoelectric

Rezolvare: In 1887, H. Hertz a descoperit ca iradierea electrozilor metalici cu radiatie electromagnetica din ultraviolet faciliteaza descarcarea electrica. Fenomenul a fost studiat mai in detaliu de W. Hallwachs, M. Stoletov si P. Lenard care au aratat ca prin iradierea suprafetelor metalice cu radiatie electromagnetica de inalta frecventa, acestea emit particule incarcate electric. Fenomenul a fost denumit efect fotoelectric. Lenard a determinat sarcina specifica (q/m) a acestor particule incarcate si a identificat aceste particule ca fiind electroni.

Datele experimentale au pus in evidenta urmatoarele legi ale efectului fotoelectric:

1) Pentru o radiatie incidenta de frecventa data, numarul de electroni emisi in unitatea de timp este proportional cu intensitatea radiatiei.

2) Electronii emisi au vitezele cuprinse intr-un interval (0, v_{max}) iar energia cinetica maxima a lor depinde liniar de frecventa si este independenta de intensitatea radiatiei.

3) Exista o frecventa minima a radiatiei (frecventa de prag, ν_{prag}) sub care nu mai are loc emisia de electroni, indiferent de intensitatea radiatiei incidente si de timpul de iradiere.

4) Emisia electronilor are loc imediat ce suprafata este iluminata, fara o intarziere detectabila.

Sa analizam daca legile efectului fotoelectric pot fi explicate pe baza teoriei ondulatorii. Unda electromagnetica produce oscilatii fortate ale electronilor in metal. La rezonanta, amplitudinea de oscilatie a electronilor devine atat de mare incat ei pot parasi metalul. Energia electronului emis prin acest mecanism ar trebui sa depinda de intensitatea undei, ceea ce este in contradictie cu datele experimentale (legea 2). Un alt dezacord al teoriei clasice in explicarea efectului fotoelectric este legat de timpul de emisie. Din punct de vedere clasic, energia incidenta este raspandita uniform pe suprafata iluminata. Pentru ca atomul sa emita un electron, aceasta energie trebuie sa se concentreze pe o regiune de dimensiune atomica, fiind necesar un anumit interval de timp (contradictie cu legea 3). S-au realizat experimente care vizau punerea in evidenta a unor intarzieri de ordinul minutelor sau orelor, dar experimentele nu au confirmat aceste intarzieri.

In 1905, Einstein da o explicare efectului fotoelectric extinzand ipoteza cuantelor de energie a lui Planck. Presupunand ca o radiatie monocromatica, de frecventa ν, se propaga in portii de energie $h\nu$ numite fotoni, el explica efectul fotoelectric pe baza interactiunii dintre un foton si un electron din atom.

Intrucat fotonul este suficient de localizat, intreaga sa energie poate fi absorbita deodata de un singur atom si ca urmare emisia este instantanee (legea 4).

Cand un foton cade pe suprafata metalica intreaga sa energie $h\nu$ este utilizata pentru a emite un electron. Daca L este energia minima necesara pentru a extrage electronul din metal (lucrul de extractie), atunci bilantul energetic al interactiunii foton – electron este dat de ecuatia:

$$h\nu = L + \frac{mv_{\max}^{2}}{2}, \tag{1}$$

cunoscuta ca ecuatia lui Einstein.

S-au folosit notatiile: h – constanta lui Planck si m – masa electronului.

Se constata ca relatia (1) este in concordanta cu legea 2.

Electronii sunt emisi daca $v_{\max} \geq 0$, adica daca $h\nu \geq L$. Frecventa de prag ν_{prag} se determina punand conditia ca viteza maxima a electronilor v_{max} sa fie zero.

Rezulta ca:

$$h\nu_{prag} = L \tag{2}$$

Constatam ca legea 3 a putut fi explicata pe baza ipotezei cuantelor de energie.

Cum probabilitatea de absorbtie simultana a doi fotoni de catre acelasi electron este foarte mica, fiecare electron extras din metal capata energe de la un singur foton. De aceea, numarul de electroni eliberati de suprafata metalului, in unitatea de timp, este poportional cu numarul de fotoni incidenti pe suprafata in unitatea de timp (legea 1).

Pentru confirmarea teoriei lui Einstein, Millikan a realizat intre anii 1914-1916 o serie de experimente de mare acuratete. Verificarea experimentala a ecuatiei (1) este foarte dificila deoarece marimea lucrului de extractie este puternic influentata de starea de puritate a suprafetei metalului.

Folosind metoda potentialului intarzietor s-a determinat tensiunea de stopare U_0 si energia cinetica maxima a electronilor extrasi ($\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0$, e fiind sarcina electronului). Millikan a masurat, pentru o suprafata data, U_0 in functie de ν si a aratat ca rezultatele se aseaza pe o dreapta de panta h/e:

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{L}{e} \tag{3}$$

Cunoscand valoarea sarcinii electrice elementare *e* Millikan a obtinut pentru *h* valoarea $h = 6{,}56 \cdot 10^{-34}$ J·s care este in acord cu rezultatele lui Planck.

3. Ecuatia Schrödinger independenta de timp

Rezolvare: Presupunem ca hamiltonianul H al unui sistem nu depinde explicit de timp. Independenta de timp a lui H inseamna de fapt ca energia potentiala V este independenta de timp. In acest caz, sistemul este conservativ, corespunzand sistemelor clasice a caror energie este constanta. Solutia ecuatiei Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{1}$$

va descrie starile cu energie bine determinata ale sistemului cuantic.
Cautam solutia ecuatiei (1), cand H nu depinde de timp, de forma unui produs dintre o functie ψ care depinde numai de coordonate si o alta functie T care depinde numai de timp:

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})T(t) \tag{2}$$

Inlocuind (2) in (1) rezulta: $$i\hbar\,\psi(\vec{r})\frac{dT(t)}{dt} = H\psi(\vec{r})T(t) \tag{3}$$

Impartim ambii membri ai relatiei (3) prin $\psi(\vec{r})T(t)$ si tinem cont de faptul ca operatorul H actioneaza doar asupra functiei $\psi(\vec{r})$. Obtinem astfel: $$i\hbar\frac{dT(t)}{dt}\cdot\frac{1}{T(t)} = \frac{H\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} \tag{4}$$

Cum cei doi membri ai acestei ecuatii depind de variabile independente intre ele (membrul stang depinde de timp iar cel drept de coordonate), egalitatea poate avea loc doar daca fiecare membru al egalitatii este egal cu aceeasi constanta (independenta de coordonate si de timp). Notand constanta cu E, din (4) se obtin doua ecuatii:

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{5}$$

$$\frac{dT(t)}{T(t)} = -iE\cdot dt/\hbar \tag{6}$$

Solutia ecuatiei (6) este, cu exceptia unui factor constant arbitrar, de forma $T(t) = e^{-iEt/\hbar}$ (7)
Rezulta astfel ca $$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\, e^{-iEt/\hbar} \tag{8}$$

reprezinta (cu exceptia unui factor constant arbitrar) solutia ecuatiei Schrödinger in cazul unui hamiltonian independent de timp.

Ecuatia (5) poarta numele de ecuatia Schrödinger independenta de timp sau ecuatia starilor stationare. Ea este de fapt ecuatia de valori proprii a operatorului H.

Semnificatia fizica a constantei E se gaseste tinand cont ca ea este valoarea proprie a hamiltonianului H in starea proprie $\psi_E(\vec{r})$: $H\psi_E(\vec{r}) = E\psi_E(\vec{r})$ (9)

Prin urmare E trebuie sa reprezinte valoarea medie a operatorului H, adica rezultatul masurarii energiei sistemului atunci cand acesta se afla in starea proprie $\Psi_E(\vec{r},t) = \psi_E(\vec{r})$ $e^{-iEt/\hbar}$. Presupunand ca functia de unda $\Psi_E(\vec{r},t)$ este normata la unitate $\int \Psi^*{}_E(\vec{r},t)\Psi_E(\vec{r},t)d^3\vec{r} = 1$ obtinem ca si functia $\psi_E(\vec{r})$ este normata la unitate $\int \psi^*{}_E(\vec{r})\psi_E(\vec{r})d^3\vec{r} = 1$.

Rezulta astfel ca: $\langle H \rangle_{\Psi_E} = \int \Psi^*{}_E(\vec{r},t)H\Psi_E(\vec{r},t)d^3\vec{r} = \int \psi^*{}_E(\vec{r})H\psi_E(\vec{r})d^3\vec{r}$

Folosind relatia (9) si faptul ca $\psi_E(\vec{r})$ este normata la unitate rezulta in final ca $\langle H \rangle_{\Psi_E} = E$.

Starile descrise de functia de unda de tipul (7) se numesc stari stationare de energie E, ele difera de functia ψ printr-un factor de faza $e^{-iEt/\hbar}$.

OPTICA

1. Demonstrati teoretic cum se poate obtine practic lumina circular polarizata.

Raspuns: Prin suprapunere a doua unde (1) si (2) electromagnetice de aceeasi amplitudine plane, manocromatice, polarizate liniar pe doua directii reciproc perpendiculare ox si oy defazate cu π/2 si care se propaga in aceeasi directie (oz) obtinem unda (3)

$$\mathbf{E}_1 = E_0\mathbf{i}\cos(kz-\boldsymbol{\omega}t) \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0\mathbf{j}\sin(kz-\omega t) \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = E_0[\mathbf{i}\cos(\cos(kz-\omega t)+\mathbf{j}\sin(kz-\omega t)] \quad (3)$$

In proiectie pe un plan perpendicular pe directia de propagare, planul xoy, varful vectorului **E** descrie un cerc de raza E_0 cu viteza unghiulara de rotatie ω, de aici si denumirea de unda plana circular polarizata.

$$\mathbf{E} = Ex\,\mathbf{i} + Ey\,\mathbf{j} \qquad E^2x + E^2y = E_0^2$$

Similar in planul xoy, varful vectorului **H**, camp magnetic, descrie un cerc defazat cu 90^0C si cu aceeasi viteza.

Daca sensul de rotatie este cel al acelor de ceasornic, unda se numeste circular polarizata spre dreapta, dextro, in caz contrar avem de-a face cu o unda ciculra polarizata spre stanga.

2. Definiti puterea de rezolutie spectrala a unei prisme optice spectrale si scrieti valoarea acesteia pentru o retea de difractie.

Cum putem creste puterea de rezolutie la o retea?

Raspuns: P.R.S.= λ/Δλ

Unde Δλ este cel mai mic interval de lungimi de unda separate in jurul lungimii de unda λ.

La retea

P.R.S.= mN

Unde m este ordinal de difractie si N numarul total de trasaturi.

Cresterea P.R.S. inseamna cresterea lui N, dar aceasta este limitata de L si miscarea lui d, denumit constanta retelei deoarece N= L/d

Utilizarea unui ordin m, superior este insotita de micsorarea intensitatii maximului de difractie.

3. Demonstrati transversalitatea undelor luminoase

Raspuns: Sa consideram undele luminoase sub forma undelor plane si monocromatice (1) care evident verifica ecuatia undelor (2).

$$U=U_0e^{i(kr-\omega t)} \tag{1}$$

$$\Delta U-1/v^2\partial^2U/\partial t^2=0 \tag{2}$$

Unde $\omega= kv$ si $k=2\pi/\lambda$

Derivand in raport cu timpul si spatial avem

$$\partial U/\partial t= - i\omega U \text{ si } \partial U/\partial x_j= ikjU \text{ cu } j= 1,2,3 \ (1=x,\ 2=y\ 3=z) \tag{3}$$

Deci,

$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\mu\omega H$, $kE=0$, $\mathbf{k}\times\mathbf{E}=-\varepsilon\omega E$

Deci $\mathbf{k}\perp\mathbf{E}$ si $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$ si $\mathbf{H}\perp\mathbf{k}$ deci **E** si **H** sunt reciproc perpendiculari.

Fizica solidului și semiconductorilor

Subiectul 1. Definiți vectorii rețelei reciproce și proprietățile rețelei reciproce.

Răspuns: Dacă vectorii de bază ai rețelei directe cristaline tridimensională sunt notați $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, vectorii de bază ai rețelei reciproce tridimensională sunt notați astfel $\vec{a}*,\vec{b}*,\vec{c}*$ și sunt definiți prin următoarele relații:

$$\vec{a}*=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)};\vec{b}*=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)};\vec{c}*=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}; \tag{10}$$

Între vectorii rețelei directe și vectorii rețelei reciproce nexistă următoarele relații:

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{a}*=\vec{b}\cdot\vec{b}*=\vec{c}\cdot\vec{c}*=1\\&\vec{a}\cdot\vec{b}*=\vec{b}\cdot\vec{c}*=\vec{c}\cdot\vec{a}*=0\end{aligned} \tag{11}$$

sau sub formă condensată:

$$\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j*=\delta_{ij}\text{, unde }\delta_{ij}=1\text{, dacă } i=j \text{ și } \delta_{ij}=0\text{, dacă } i\neq j. \tag{12}$$

În relațiile (10) s-a notat volumul celulei elementare al rețelei directe cu $V=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, mărime ce se află la numitorul acestor relații.

Proprietățile rețelei reciproce

1. *Produsul dintre volumul celulei din rețeaua directă și volumul celulei din rețeaua reciprocă este întotdeauna egal cu unu.*

Demonstrație:

Dacă volumul celulei rețelei reciproce este $V=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ și volumul celulei din rețeaua reciprocă este dat de relația $V*=\vec{a}*\left(\vec{b}*\times\vec{c}*\right)$, atunci produsul lor se calculează:

$$V \cdot V* = \left[\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right] \cdot \left[\vec{a}*\left(\vec{b}* \times \vec{c}*\right)\right] = \left(\vec{a} \cdot \vec{a}*\right)\begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{b}* & \vec{b} \cdot \vec{c}* \\ \vec{c} \cdot \vec{b}* & \vec{c} \cdot \vec{c}* \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. *Orice vector al rețelei reciproce ce trece printr-un nod* $[[hkl]]$ *este întotdeauna perpendicular pe planul rețelei directe caracterizat prin aceiași indici Miller* (hkl)**.**

Demonstrație:

Planul (hkl) intersectează axele de coordonate în punctele plasate față de origine la distanțele $\frac{\vec{a}}{h}, \frac{\vec{b}}{k}, \frac{\vec{c}}{k}$. Vectorul rețelei reciproce ce trece prin nodul $[[hkl]]$ are expresia $\vec{r}* = h\vec{a}* + k\vec{b}* + l\vec{c}*$. Pentru a demonstra că vectorul rețelei reciproce este perpendicular pe planul rețelei directe este suficient să demonstrăm că el este perpendicular pe doi vectori conținuți în acest plan, ca de exemplu vectorii: $\left(\frac{\vec{a}}{h} - \frac{\vec{b}}{k}\right); \left(\frac{\vec{b}}{k} - \frac{\vec{c}}{l}\right)$ ceea ce înseamnă că produsele lor scalare sunt nule.

$$\left(\frac{\vec{a}}{h} - \frac{\vec{b}}{k}\right) \cdot \vec{r}* = \left(\frac{\vec{a}}{h} - \frac{\vec{b}}{k}\right) \cdot \left(h\vec{a}* + k\vec{b}* + l\vec{c}*\right) = 0$$

$$\left(\frac{\vec{b}}{k} - \frac{\vec{c}}{l}\right) \cdot \vec{r}* = \left(\frac{\vec{b}}{k} - \frac{\vec{c}}{l}\right) \cdot \left(h\vec{a}* + k\vec{b}* + l\vec{c}*\right) = 0$$

3. *Distanța dintre două plane ale rețelei directe este totdeauna egală cu inversul lungimii unui vector unui vector din rețeaua reciprocă.*

Demonstrație:

Fie d distanța dintre două plane al rețelei directe și anume: primul plan dat de indicii Miller (hkl) și al doilea un plan paralel cu primul ce trece prin origine. Fie $|\vec{r}*|$ lungimea vectorului rețelei reciproce. Deoarece am demonstrat în cadrul proprietății 2 că un vector al rețelei reciproce este perpendicular pe planul rețelei directe, atunci vom putea defini versorul normalei la planul rețelei directe prin relația: $\vec{n} = \frac{\vec{r}*}{|\vec{r}*|}$. Distanța dintre cele două plane ale rețelei directe definite mai sus are expresia:

$$d = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{h} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}*}{h|\vec{r}*|} = \frac{\vec{a} \cdot \left(h\vec{a}* + k\vec{b}* + l\vec{c}*\right)}{h|\vec{r}*|} = \frac{1}{|\vec{r}*|}$$

4. *Datorită relațiilor de legătură dintre vectorii rețelei directe și vectorii rețelei reciproce, fircărei rețele Bravais îi corespunde o rețea reciprocă, dar nu întotdeauna tipul rețelei Bravais corespunde cu tipul rețelei reciproce.*

De exemplu:

- rețeaua cubică simplă și rețeaua ortogonală din rețeaua directă formează tot o rețea cubică simplă ți o rețea ortogonală în rețeaua reciprocă;
- rețeaua cubică cu volum centrat din rețeaua directă formează o rețea cubică cu fețe centrate în rețeaua reciprocă.

Subiectul 2. Deduceți expresia ce definește numărul de defecte punctuale numite interstiții sau defecte Frenkel existente într-un cristal solid.

Răspuns: Defectele Frenkel sau interstițiile se formează într-un cristal solid atunci când atomii sau ionii nu se plasează în nodurile rețelei cristaline, ci ocupă poziții intermediare. Pentru formarea acestor defecte punctuale este necesară o energie mai mare decât pentru formarea vacanțelor și din acestă cauză ele sunt mult lai rar întâlnite decât vacanțele. Fie N numărul de atomi din rețea, N' numărul de poziții interstițiale, n_i numărul de atomi interstițiali și E_i energia necesară apariției unui interstițiu.

Energia internă a cristalului solid cu interstiții are expresia $U=U_0+n_iE_i$ iar energia liberă $F=U-TS$. Numărul total de distribuții ale interstițiilor este dat de relația:

$$W=\frac{N!}{n_i(N-n_i)!}\cdot\frac{N^{`}}{(N^{`}-n_i)!n_i!}$$

– Înlocuind această relație în expresia entropiei se obține relația:

$$S=S_0+k_B\ln\frac{N!}{n_i(N-n_i)!}\cdot\frac{N^{`}}{(N^{`}-n_i)!n_i!}$$

Energia liberă devine:

$$F=U_0+n_iE_i-TS_0-k_BT\ln\frac{N!}{n_i(N-n_i)!}\cdot\frac{N^{`}}{(N^{`}-n_i)!n_i!}=$$

$$=F_0+n_iE_i-k_BT\ln\frac{N!}{n_i(N-n_i)!}\cdot\frac{N^{`}}{(N^{`}-n_i)!n_i!}$$ unde s-a notat cu $F_0=U_0-TS_0$, presupunînd că temperatura este constantă.

Pentru a deduce configurația la echilibru impunem condiția:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_T=0$$

Se utilizează formula lui Stirling:

$\ln N!\cong N\ln N-N$, $\ln(N-n_i)!\cong(N-n_i)\ln(N-n_i)-(N-n_i)$, ...

După înlocuiri și derivare se obține relația:

$$E_i-k_BT\ln\frac{(N-n_i)(N^{`}-n_i)}{n_i^2}=0$$

$$\frac{(N-n_i)(N^{`}-n_i)}{n_i^2}=e^{\frac{E_i}{k_BT}}\quad\text{sau}\quad\frac{n_i^2}{(N-n_i)(N^{`}-n_i)}=e^{-\frac{E_i}{k_BT}}$$

Presupunând că $n_i\langle\langle N, n_i\langle\langle N^{`}$ se obține relația:

$$\frac{n_i^2}{N\cdot N^{`}}=e^{-\frac{E_i}{k_BT}}\qquad\text{sau}\qquad n_i=\sqrt{N\cdot N^{`}}e^{-\frac{E_i}{2k_BT}}$$

Această relație definește numărul de interstiții care pot să apară într-un cristal solid la echilibru termic. Se remarcă faptul că numărul lor crește exponențial cu creșterea temperaturii.

Subiectul 3. Definiți funcția Bloch și proprietățile ei.

Răspuns: Studiul mișcării electronilor într-un potențial periodic se face prin rezolvarea ecuației lui Schrodinger cu ajutorul căreia se va determina energia E și funcția Ψ.

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{h^2}\left[E - V(\vec{r})\right]\Psi = 0$$

Deoarece energia potențială este o funcție periodică de forma:

$$V\left(\vec{r} + \vec{R}_m\right) = V\left(\vec{r} + n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3\right) = V(\vec{r})$$

Pentru a rezolva ecuația lui Schrodinger se impune condiția de ciclicitate care cere ca funcția de undă să fie periodică cu perioada domeniului fundamental, conform relației:

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi\left(\vec{r} + G_1\vec{a}_1\right) = \Psi\left(\vec{r} + G_2\vec{a}_2\right) = \Psi\left(\vec{r} + G_3\vec{a}_3\right)$$

În acest caz Bloch a demonstrat că soluțiile ecuației Schrodinger au forma:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}u_{\vec{k}}(\vec{r}),$$

adică o undă plană modulată de o funție $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ care are aceeași periodicitate cu a rețelei cristaline: $u_{\vec{k}}\left(\vec{r} + \vec{R}_n\right) = u_{\vec{k}}(\vec{r})$. care se numește **funcție Bloch**. Existența acestei funcții se poate demonstra ținând cont de proprietățile de translație ale rețelei cristaline precum și de condiția de ciclicitate.

Proprietățile funcțiilor de undă Bloch.

1. Această proprietate este cunoscută sub numele de teorema lui Bloch –Floquet și afirmă că la o translație a rețelei cristaline de forma $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{R}_n$, funcția Bloch nu este invariantă, deci ea nu are periodicitatea rețelei cristaline.

$$\Psi_{\vec{k}}\left(\vec{r} + \vec{R}_n\right) = e^{i\vec{k}\left(\vec{r} + \vec{R}_n\right)} \cdot u_{\vec{k}}\left(\vec{r} + \vec{R}_n\right) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot e^{i\vec{k}\vec{R}_n} \cdot u_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{R}_n} \cdot \Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

În acest caz se observă că funcția Bloch se înmulțește cu un factor exponențial, la exponent fiind chiar vectorul de translație al rețelei cristaline $e^{i\vec{k}\vec{R}_n}$.

2. O funcție de tip Bloch rămâne neschimbată dacă se înlocuiește vectorul de undă $\vec{k}$ cu vectorul $\vec{k}' = \vec{k} + 2\pi\vec{K}'_m$ unde $\vec{K}'_m$ este un vector al rețelei reciproce.

Pentru a demonstra acesat lucru trebuie să folosim o proprietate a rețelei reciproce. Deoarece $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ are periodicitatea rețelei, poate fi dezvoltat într-o serie Fourier de forma:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}_m} a_{\vec{K}_m} e^{2\pi i\vec{K}_m\vec{r}}$$

Înlocuind această expresie în formula funcției Bloch vom obține:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{K}_m} a_{\vec{K}'_m} e^{2\pi i\vec{K}_m\vec{r}}$$

Vom înmulți relația de mai sus cu $e^{\pm 2\pi i\vec{K}'_m}$ și vom restrânge astfel:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\left(\vec{k} + 2\pi i\vec{K}'_m\right)\vec{r}} \sum_{\vec{K}_m} a_{\vec{K}_m} e^{2\pi i\left(\vec{K}_m - \vec{K}'_m\right)\vec{r}}$$

Vom nota $\vec{K}_m - \vec{K}'_m = \vec{K}''_m$ care este tot un vector al rețelei reciproce. Se obține:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \sum_{\vec{K}'_m + \vec{K}''_m} a_{\vec{K}'_m + \vec{K}''_m} e^{2\pi i\vec{K}''_m\vec{r}}$$

Din această relație se vede că funcția Bloch rămâne nemodificată deoarece suma de vectori din rețeaua reciprocă este tot un vector al rețelei reciproce, deci are tot periodicitatea rețelei, cu excepţia unei reordonări a termenilor de însumare. Pentru a evita nedeterminarea care apare în privința valorilor vectorului de undă, se limitează domeniul de variație al lui la o singura celulă a rețelei reciproce care se numește domeniul fundamental al vectorului de undă sau prima zonă Brillouin.

Fizica moleculara si caldura

Subiectul 1. Principiul întâi al termodinamicii

Răspuns: Pe baza unui mare număr de experienţe s-a putut ajunge la următoarea concluzie care constituie enunţul primului principiu al termodinamicii: **dacă un sistem termodinamic este închis într-un înveliş adiabatic şi trece dintr-o stare iniţială (i) într-o stare finală (f) printr-o transformare oarecare, lucrul mecanic efectuat de forţele exterioare nu depinde decât de starea (parametrii stării) (i) şi de starea (parametrii stării) (f), fiind independent de modul concret în care a avut loc transformarea.**

Din punct de vedere matematic această afirmaţie implică faptul că lucrul mecanic elementar este o **diferenţială totală exactă.** De aceea vom scrie

$$L_{if} = \int_{(i)}^{(f)} \delta L = U_f - U_i \qquad \text{sau} \qquad L = dU \qquad (1)$$

în care mărimea U, dependentă numai de parametrii care caracterizează o anumită stare, se numeşte **energie internă.** Ea este o **funcţie (mărime) de stare**. Deşi din punct de vedere dimensional energia internă şi lucrul mecanic au acelaşi dimensiuni (se măsoară în Jouli), între aceste două mărimi trebuie făcută o distincţie netă: în timp ce energia internă depinde numai de **starea** sistemului, lucrul mecanic este definit numai pentru o **transformare** a stării sistemului.

Din modul în care a fost definită, este clar că energia internă U este determinată numai până la o constantă aditivă arbitrară (cu dimensiuni de energie). Vom putea vedea însă că în rezolvarea multor probleme concrete această arbitrarietate nu este deloc supărătoare (deoarece ceea ce interesează este, de cele mai multe ori, variaţia energiei interne).

Să ridicăm acum restricţia de izolare adiabatică a sistemului. În aceste cazuri, experienţa arată că relaţia (1) nu mai este verificată, adică:

$$U_f - U_i \neq L_{if}$$

Acest fapt ne arată că în general lucrul mecanic elementar nu mai este o diferenţială totală exactă, $\delta L \neq dU$. Prin definiţie, diferenţa dintre variaţia de energie internă $U_f - U_i$ şi lucrul mecanic L_{if} va fi numită **cantitate de căldură (primită sau cedată) schimbată** de sistem cu mediul exterior în transformarea de la starea (i) la starea (f):

$$Q_{if} = U_f - U_i - L_{if}$$

Într-un proces infinitezimal această relaţie are forma:

$$\delta Q = dU - \delta L \qquad \text{sau} \qquad dU = \delta Q + \delta L$$

Din aceste relaţii rezultă **o altă definire a izolării adiabatice**: un sistem se spune că este izolat adiabatic de mediul înconjurător dacă el nu schimbă căldura cu acesta.

Putem da acum formularea completă a primului principiu al termodinamicii în felul următor: **variaţia energiei interne a unui sistem la trecerea de la o stare la alta este egală cu suma dintre lucrul mecanic şi cantitatea de căldură schimbate de sistem cu exteriorul.** (Subliniem că în timp ce dU este o diferenţială totală exactă, δL şi δQ nu sunt – în general-diferenţiale totale exacte şi de aceea litera d este înlocuită cu δ).

Pentru schimbul de căldură (ca şi pentru lucrul mecanic) vom adopta următoarea convenţie: **cantitatea de căldură este pozitivă dacă este primită de sistem de la mediul înconjurător şi negativă dacă este cedată de sistem mediului înconjurător.**

Ca o funcţie de stare, energia internă este perfect determinată de parametrii intensivi A_i şi extensivi a_i ($i=\overline{1,n}$) ai stării considerate:

$$U = U(A_1,...,A_n;\ a_1,...,a_n)$$

Ţinând cont de expresiile ecuaţiilor termice de stare şi presupunând că temperatura este măsurată în scara Kelvin mai putem scrie:

$$U = U(T;\ a_1,...,a_n)$$

Această dependenţă poartă denumirea de **ecuaţie calorică de stare.** În cadrul intrinsec al termodinamicii ea nu se poate determina decât pe baza datelor experimentale (obţinute cât mai precis).

Subiectul 2. Sa se defineasca procesele politrope, sa se scrie ecuatia procesului politrop, sa se discute cazurile particulare η=0, η=1, $\eta=\gamma=\frac{C_p}{C_v}$, η=∞ **si sa se traseze curbele proceselor politrope corespunzatoare.**

Răspuns: Se numesc politrope, acele procese pentru care schimbul elementar de căldură se poate scrie sub forma $\delta Q = C\cdot dT$ în care „capacitatea calorică" C a procesului este **constantă**.

Ecuaţia procesului politrop al gazului perfect monoatomic este:

$$p\cdot V^{\eta} = \text{constant} \qquad \text{sau} \qquad V\cdot p^{\frac{1}{\eta}} = \text{const}$$

in care

$$\eta=\frac{C-C_p}{C-C_v}$$

se numeste **indicele politropic** si este un număr adimensional constant.

Discutia cazurilor particulare:

1) Dacă η=0 obţinem p=constant, $C=C_p$ şi procesul politrop este de fapt un proces **izobar.**
2) Dacă η=1 obţinem pV=constant, respectiv T=constant şi procesul nostru este un **proces izoterm.** În acest caz C=∞
3) Dacă $\eta=\gamma=\frac{C_p}{C_v}$ obţinem C=0 şi procesul politrop este acum un proces **adiabatic,** cu ecuaţia pV^{γ}=constant (ecuaţia lui Poisson). Pentru un gaz perfect monoatomic $\gamma = 5/3$
4) Dacă η=∞ obţinem $C=C_V$ adică V=constant şi procesul nostru este un proces **izocor.**

Cele patru procese politrope particulare sunt reprezentate grafic în figura 1. Curba MM′ este izoterma, iar curba NN′ este adiabata gazului perfect monoatomic. Ele se intersectează într-un singur punct (Q).

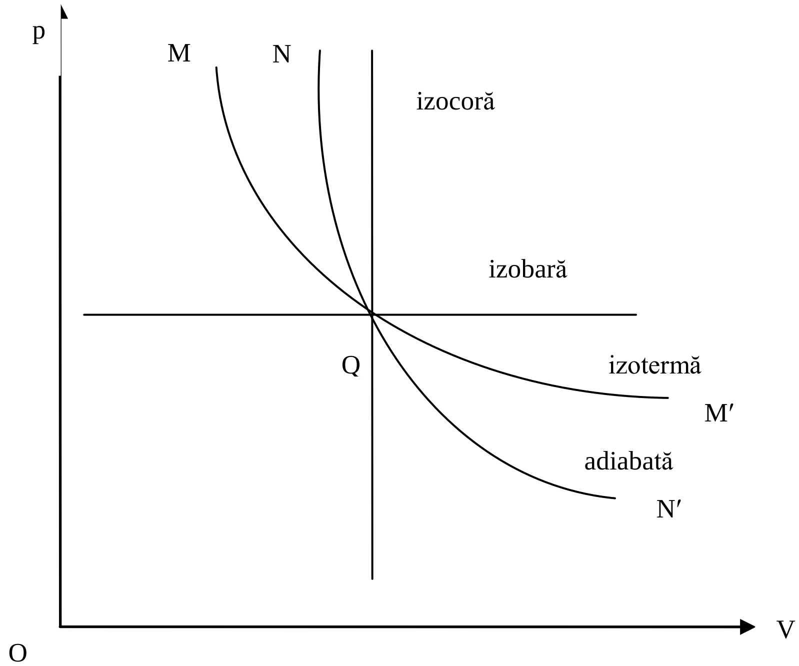
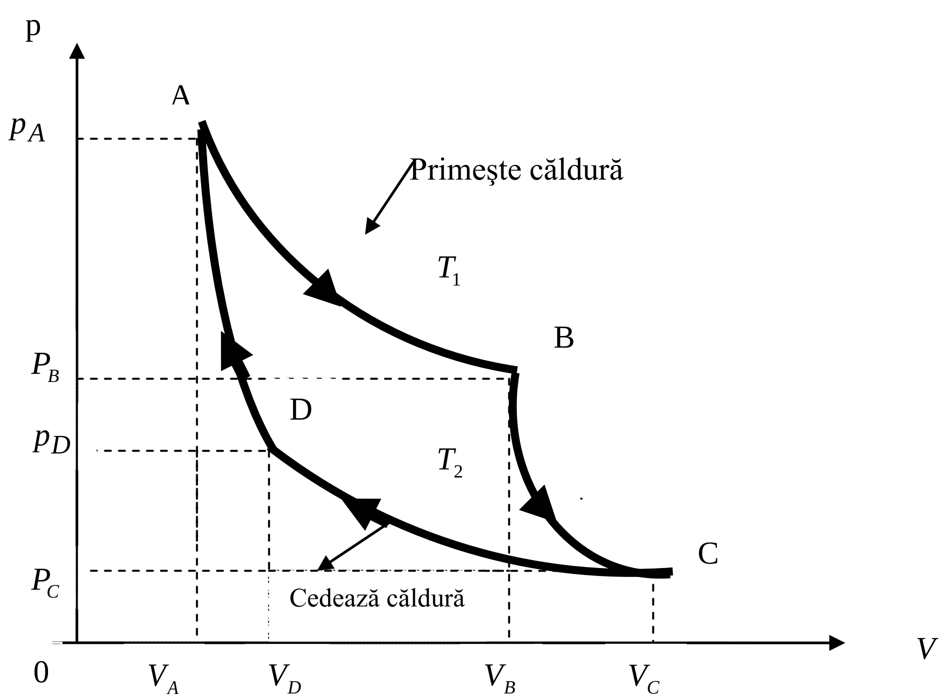


Fig.1

Subiectul 3. Sa se trateze subiectul: Ciclul lui Carnot.

Răspuns: Ciclul lui Carnot funcţionează cu o substanţă ale cărei proprietăţi le cunoştem bine: gazul ideal. Ciclul este format din patru ramuri: două izoterme(*AB* şi *CD*) şi două adiabate (*BC* şi *DA*). Fie T_1 temperatura pe izoterma *AB* şi T_2 temperatura pe izoterma *CD*. Este evident că $T_1>T_2$ (figura).



Deoarece în procesele adiabatice *BC* şi *DA* gazul perfect (adică fluidul de lucru al maşinii) nu schimbă căldură cu mediul înconjurător, putem scrie:
$Q = Q_{AB} + Q_{CD}$ în care $Q_{AB}(Q_{CD})$joacă rolul lui $Q_1(Q_2)$.

Pentru evaluarea lui Q_{AB} şi Q_{CD} ne vom folosi de principiul întâi al termodinamicii, considerându-l pentru aceste procese finite, izoterme. Deoarece energia internă a gazelor perfecte depinde numai de temperatură (efect Joule), în procesele izoterme $(\Delta U)_{AB}$ şi $(\Delta U)_{CD}$ sunt zero şi principiul I ne dă:

$$0 = L_{AB} + Q_{AB} \qquad \text{şi} \qquad 0 = L_{CD} + Q_{CD}$$

unde

$$L_{AB} = \int_A^B \delta L = -\int_A^B p dV = RT_1 \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

şi similar

$$L_{CD} = \int_C^D \delta L = -\int_{V_C}^{V_D} p dV = RT_2 \int_{V_D}^{V_C} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_D}\right)$$

Astfel obţinem:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = \frac{-L_{CD}}{-L_{AB}} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{\ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)}$$

Eliminând presiunile între ecuaţiile celor patru procese care alcătuiesc ciclul:

$$\left| \begin{array}{l} p_A V_A = p_B V_B \\ p_C V_C = p_A V_D \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} p_B V_B^{\gamma} = p_c V_c^{\gamma} \\ p_D V_D^{\gamma} = p_A V_A^{\gamma} \end{array} \right.$$

obţinem uşor $\left(\frac{V_C}{V_D}\right) = \left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-1}$ şi în final:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(T_1, T_2) = -\frac{T_2}{T_1}$$

În acest fel forma funcţiei universale $f(T_1, T_2)$ a fost determinată şi pentru procesele ciclice, reversibile, biterme si putem scrie în general:

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1.$$

De aici rezultă imediat:

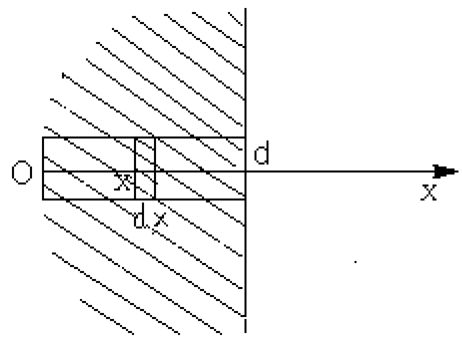
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Mărimile de forma *Q/T* poartă denumirea de **călduri reduse** şi ultima relaţie arata că **în orice proces ciclic, reversibil, biterm suma căldurilor reduse** (corespunzând celor două termostate) **este egală cu zero.**

ELECTRICITATE SI MAGNETISM

SUBIECTUL 1. Presiune electrostatică

Răspuns: Sarcina electrică se distribuie exclusiv pe suprafaţa sa, având densitatea σ. Ar fi interesant de examinat situaţia în care am presupune că distribuţia nu este strict superficială, ci este de fapt o distribuţie volumică pe un strat superficial de grosime d foarte mică.



Ne alegem o geometrie a conductorului, astfel încât axa Ox să fie perpendiculară pe suprafaţa conductorului iar distribuţia volumică de sarcină sa corespundă unui strat foarte îngust de coordonate 0 şi d, densitatea volumică de sarcină din acest strat fiind $\rho(x)$. Considerăm un volum cilindric coaxial cu axa Ox, având o bază pe suprafaţa conductorului, perpendiculară pe axa Ox în punctul A de coordonată x=d, iar cealaltă bază fiind în interiorul conductorului, perpendiculară pe axa Ox în punctul O de coordonată (x=0). Notăm cu S aria bazei cilindrului. Vom avea pentru sarcina electrică repartizată în acest volum, expresia:

$$q = \int_0^d \rho(x) S dx = S \int_0^d \rho(x) dx = S\sigma$$

Observaţi că am făcut notaţia: $\int_0^d \rho(x) dx = \sigma$

Din exemplele de calcul din paragrafele precedente am semnalat deja că pentru o distribuţie volumică uniformă de sarcină, intensitatea câmpului electrostatic este o funcţie continuă. Să aplicăm teorema lui Gauss pe un volum foarte mic din stratul superficial încărcat electric, de forma unui cilindru coaxial cu axa Ox, având bazele de coordonate x şi x+dx, de arie S:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Primul membru al integralei se separă într-o sumă de trei integrale de suprafaţă extinse pe cele două baze S_1 şi S_2 precum şi pe aria laterală a cilindrului:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}(x)\vec{n}_1 dS + \iint_{S_{22}} \vec{E}(x+dx)\vec{n}_2 dS + \iint_{A_{lat}} \vec{E}\vec{n}_{lat} dS$$

Deoarece vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe generatoarea cilindrului a treia integrală din dezvoltare este nulă. Înlocuind şi expresia pentru q_{int} în teorema lui Gauss obţinem:

$$[E(x+dx) - E(x)]S = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) S dx$$

Folosind definiţia derivatei unei funcţii, obţinem pentru densitatea volumică de sarcină următoarea expresie:

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{dE(x)}{dx}$$

Să calculăm, în continuare, forţa exercitată de câmpul E(x) asupra sarcinii electrice din volumul cilindric elementar de înălţime dx considerat:

$$d\vec{F} = \vec{E}(x)\rho(x)Sdx = \vec{n}E(x)\rho(x)Sdx$$

unde, $\vec{n}$ este normala exterioară suprafeţei conductorului.
Prin integrare între limitele x=0 şi x=d obţinem forţa totală exercitată asupra cilindrului

$$\vec{F} = \vec{n}\int_{x=0}^{x=d} E(x)\rho(x)Sdx = \vec{n}S\varepsilon_0 \int_{x=0}^{x=d} E(x)\frac{dE(x)}{dx}dx = \frac{1}{2}\vec{n}S\varepsilon_0 E^2(x)\Big|_{x=0}^{x=d}$$

Efectuând înlocuirile

$$E(0) = 0; \quad E(d) = E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

obţinem: $\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S\,\vec{n}$

Această forţă orientată tot timpul de-a lungul normalei exterioare a conductorului are caracterul unei forţe de presiune. Presiunea corespunzătoare p=F/S se numeşte *presiune electrostatică* şi are expresia:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Se poate uşor verifica existenţa acestei forţe de presiune prin imaginarea următorului experiment. Pe o sferă metalică de rază R de ordinul centimetrilor pe care o legăm la polul pozitiv al unei maşini electrostatice se aşează un disc metalic de masă foarte mică (~0.01g). Se constată că la un potenţial de ordinul ~10^4V discul va intra în levitaţie, stare ce corespunde echilibrului dintre forţa de greutate orientată vertical în jos şi forţa de presiune electrostatică orientată vertical în sus:

$$mg = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi\ r^2$$

Densitatea superficială de sarcină depinde de potenţialul la care se încarcă sfera metalică pe baza relaţiilor:

$$\sigma = \frac{q_{sfera}}{4\pi R^2}; \quad V = \frac{q_{sfera}}{4\pi\,\varepsilon_0 R} \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{R}$$

Rezultă următoarea condiţie pentru a avea loc levitaţia discului:

$$V \geq \frac{R}{r}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\varepsilon_0}}$$

Subiect 2. Câmpul magnetic pe axul unei bobine plate cu N spire

Răspuns: Considerăm o bobina plată, de rază R, cu N spire, prin care trece curentul constant I. Să se calculeze inducţia magnetică a câmpului magnetic creat de bobină într-un punct situat pe axul bobinei la distanţa x de bobină.

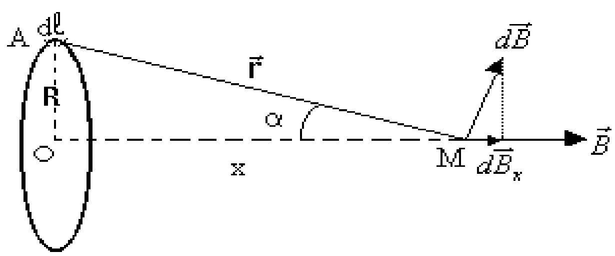


Fig.3.5

Un element de linie $d\ell$ din jurul punctului A (situat pe spiră) crează în M un câmp magnetic de inducţie $d\vec{b}$ dat de legea Biot-Savart :

$$d\vec{b} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}$$

Deoarece, $d\vec{\ell}\perp\vec{r}$, modulul vectorului $d\vec{b}$ este :

$$db = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell}{R^2 + x^2}$$

iar pentru componenta inducţiei magnetice, orientată de-a lungul axei Ox, scriem:

$$db_x = db\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\alpha}{R^2 + x^2}d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}d\ell$$

Din considerente de simetrie, componenta lui $d\vec{b}$ perpendiculară pe Ox este zero.

Astfel valoarea în modul a inducţiei câmpului magnetic, produs de bobina plată cu N spire în punctul M, are expresia:

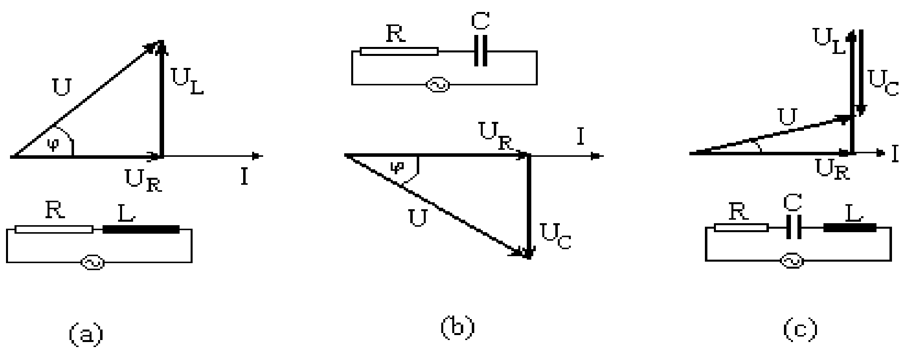
$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} d\ell$$

Deci:

$$\boxed{B(x) = \frac{\mu_0 NI}{2R}\frac{R^3}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} = B_0 \sin^3\alpha}$$

unde am făcut notaţia: $B_0 = \dfrac{\mu_0 NI}{2R}$

SUBIECTUL 3. Legea Legea lui Ohm in reprezentarea numerelor complexe. Rezonanta serie



(a) (b) (c)

Notăm cu $j = \sqrt{-1}$ numarul complex pentru a nu-l confunda cu i=intensitatea instantanee a curentului alternativ.
Fie un circuit serie RLC (Fig.1-(c)) pentru care legea a II-a lui Kirchhoff se scrie astfel :

$$Ri = u - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int i dt$$

Derivăm în raport cu timpul expresia de mai sus, în care tensiunea electromotoare este $u = U_m \sin\omega t$, iar numărul complex asociat este $\underline{u} = U$. Rezultă:

$$\frac{du}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} \qquad (*)$$

Deoarece

$$\frac{du}{dt} = \omega U_m \cos\omega t = \omega U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

putem găsi numărul complex ce corespunde derivatei de ordinul întâi:

$$\frac{du}{dt} \rightarrow j\omega U = j\omega\underline{u}$$

Efectuând toate derivatele din expresia (*) şi asociind numerele complexe corespunzătoare, obţinem:

$$j\omega\underline{u} = Rj\omega\underline{i} - L\omega^2\underline{i} + \frac{\underline{i}}{C}$$

Înmulţim fiecare membru al expresiei obţinute cu $\frac{1}{j\omega}$. Rezultă:

$$\underline{u} = \underline{i}\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]$$

Astfel, legea lui Ohm este de forma

$$\underline{u} = \underline{i} \cdot \underline{Z}$$

unde $\underline{Z}$ este impedanţa complexă a circuitului RLC serie :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + jX$$

X=reactanţa circuitului.
Se observă că pentru fiecare element din circuit se poate asocia o impedanţă complexă:

$$\underline{Z_R} = R; \quad \underline{Z_L} = j\omega L; \quad \underline{Z_C} = -\frac{j}{\omega C}$$

iar impedanţa complexă echivalentă este egală cu suma impedanţelor complexe ale elementelor grupate în serie în circuitul considerat:

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}$$

(relaţie similară ca formă celei care se aplică la gruparea serie a rezistenţelor din circuitele de curent continuu).
Modulul impedanţei este

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

iar defazajul φ este dat de

$$tg\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Evident, impedanţa complexă se poate scrie şi sub formă exponenţială:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$$

Mărimea inversă impedanţei se numeşte **admitanţă** (Y) :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Rezonanţa în circuitul serie de curent alternativ

Condiţia de rezonanţă:

$$X = 0 \Rightarrow X_L = X_C$$

permite găsirea frecvenţei de **rezonanţă** (frecvenţă proprie a circuitului) dată de formula lui Thomson:

$$\underline{\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

La **rezonanţă, într -un circuit serie** intensitatea curentului este maximă ($I = \frac{U}{R}$) iar la bornele condensatorului şi ale bobinei se înregistrează supratensiuni, definindu -se factorul de supratensiune care se mai numeşte şi factor de calitate:

$$Q = \left.\frac{U_L}{U}\right|_{\omega_0} = \left.\frac{U_C}{U}\right|_{\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Bibliografie admitere 2011,

Studii Universitare de Maserat,

Domeniul FIZICA, Specializarea FIZICA MATERIALELOR

1. R. Titeica, I. Popescu, Fizica generala, Vol. I. Editura Tehnica, Bucuresti, 1971.
2. E. Luca, C. Ciubotariu, Gh. Zet, A. Paduraru, Fizica generala, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1981.
3. I.I Popescu, F. Uliu, Bazele fizice ale opticii, Vol. I, Optica scalara, Editura Universitaria, Craiova, 1998.
4. C. Motoc, Fizica Solidului, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1968.